ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЯ №26 ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ (9 КЛАСС).

Последнее 26-е задание ОГЭ по математике - планиметрическая задача на вычисление, более сложная по сравнению с задачей 24. Последнюю можно рассматривать как своего рода подготовительную задачу: многие идеи и методы, необходимые для её решения, используются и при решении задания 26.

Рассмотрим типичные примеры с решениями задания №26.

ТРЕУГОЛЬНИКИ

Пример 1. В треугольнике *ABC* биссектриса *BE* и медиана *AD* перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 12. Найдите стороны треугольника *ABC*.

Решение. Пусть *P* – точка пересечения отрезков *BE* и *AD* (рис. 1).

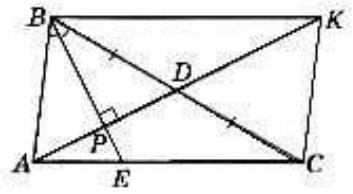

Рис. 1

Треугольник ABD равнобедренный, так как его биссектриса BP является высотой. Поэтому

$$AP = PD = 6,\ BC = 2BD = 2AB.$$

По свойству биссектрисы треугольника ABC

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} = 2,$$

Откуда $AC = 3AE$.

Проведем через вершину *B* прямую, параллельную *AC*. Пусть *K* – точка пересечения этой прямой с продолжением медианы *AD*.

Тогда *BK – AC –* 3*AE.*

Из подобия прямоугольных треугольников *APE* и *KPB* следует, что

$$\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}.$$

Поэтому *PE* = 3 и *BP* = 9.

Следовательно,

$$AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = 3\sqrt{13}, \qquad BC = 2AB = 6\sqrt{13}$$
$$AE = \sqrt{AP^2 + EP^2} = 3\sqrt{5}, \qquad AC = 3AE = 9\sqrt{5}.$$

Ответ: $3\sqrt{13},\ 6\sqrt{13},\ 9\sqrt{5}$.

Пример 2. Через середину *K* медианы *BM* треугольника *ABC* и вершину *A* проведена прямая, пересекающая сторону *BC* в точке *P*.

Найдите отношение площади треугольника *ABK* к площади четырехугольника *KPCM*.

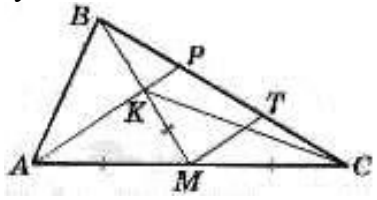

Рис.2

Решение. Проведем прямую *MT* параллельно стороне *AP*. Тогда *MT* – средняя линия треугольника *APC* и *CT = TP*, а *KP* – средняя линия треугольника *BMT* и *TP = BP*. Обозначим площадь треугольника BKP через S. Тогда площадь треугольника KPC, имеющего ту же высоту и вдвое большее основание, равна 2S, значит, площадь треугольника CBK равна 3S и равна площади треугольника CMK, которая, в свою очередь, равна площади треугольника AMK. Площадь треугольника ABK равна площади треугольника AMK.

Итак,

$$S_{BKP} = S, S_{KPC} = 2S,$$
$$S_{CMK} = 3S = S_{AMK} = S_{ABK}\ S_{KPCM} = 5S.$$

Значит

$$S_{ABK} : S_{KPCM} = 3 : 5.$$

Ответ: 3 : 5.

Пример 3. Медиана *BM* и биссектриса *AP* треугольника *ABC* пересекаются в точке *K*, длина стороны *AC* втрое больше длины стороны *AB*. Найдите отношение площади треугольника *ABK* к площади треугольника *ABC* (рис. 3).

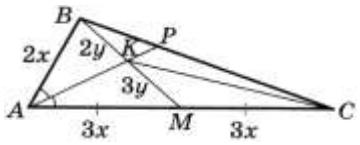

Рис. 3

Решение. Пусть $AM = MC = 3x$,

Тогда $AB = 2x$.

Так как АК – биссектриса треугольника АВМ, то $BP : PC = AB : AC = 1 : 3$.

Обозначим площадь треугольника *BKP* через *S*. Тогда площадь треугольника *KPC*, имеющего ту же высоту и втрое большее основание, равна 3*S*. Значит, площадь треугольника *CBK* равна 4*S*, а площадь треугольника *CMK* равна 6*S* и равна площади треугольника *AMK*. Тогда площадь треугольника *ABK* равна 4*S*. Итак,

$$S_{BKP} = S, S_{KPC} = 3S,$$
$$S_{CMK} = 6S = S_{AMK}, S_{ABK} = 4S.$$

Значит,

$$S_{ABK} : S_{ABC} = 4S : 20S = 1 : 5.$$

Ответ: 1 : 5.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Пример 4. Биссектрисы углов *A* и *B* параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке К. Найдите площадь параллелограмма, если *BC* = 19, а расстояние от точки *K* до стороны *AB* равно 7.

Решение. Пусть *KH*, *KN* и *KM* – перпендикуляры, опущенные из точки *K* к сторонам *AB*, *BC* и *AD* соответственно (рис. 4).

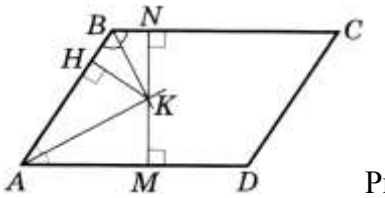

Рис. 4

Тогда *KM* = *KH* = *KN* = 7. Кроме того, точки *M, K* и *N* лежат на одной прямой, а высота *MN* параллелограмма *ABCD* равна *MK* + *KN* = 14.

По формуле площади параллелограмма находим $S_{ABCD} = BC \cdot MN = 19 \cdot 14 = 266$.

Ответ: 266.

Пример 5. Углы при одном из оснований трапеции равны 77° и 13°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны соответственно 11 и 10. Найдите длины оснований трапеции.

Решение. Пусть *ABCD* – данная трапеция, *AD* – большее основание, *K* и *L* – середины сторон *AB* и *CD* соответственно. Сумма углов при одном из оснований равна

$$77° + 13° = 90°,$$

так что это большее основание *AD*. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке *O* (рис. 5).

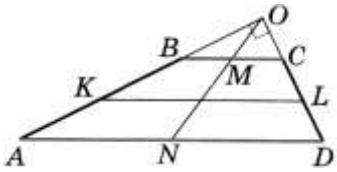

Рис. 5

Легко видеть, что

$$\angle AOD = 180° - (77° + 13°) = 90°$$

Пусть *N* – середина основания *AD*. Тогда

$$ON = \frac{AD}{2}$$

– медиана прямоугольного треугольника *AOD*. Поскольку медиана *ON* делит пополам любой отрезок с концами на сторонах *AO* и *DO* треугольника *AOD* и параллельный стороне *AD*, она пересекает основание *BC* также в его середине *M*. Значит,

$$OM = \frac{BC}{2}.$$

Таким образом, $MN = \frac{AD-BC}{2}$.

Средняя линия трапеции при этом равна $KL = \frac{AD+BC}{2}$.

Получаем:

$$AD = MN + KL = 11 + 10 = 21,$$
$$BC = KL - MN = 11 - 10 = 1.$$

Ответ: 21; 1.

Пример 6. Боковые стороны *AB* и *CD* трапеции *ABCD* равны соответственно 40 и 41, а основание *BC* равно 16. Биссектриса угла *ADC* проходит через середину стороны *AB*. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть M – середина стороны *AB* (рис. 6).

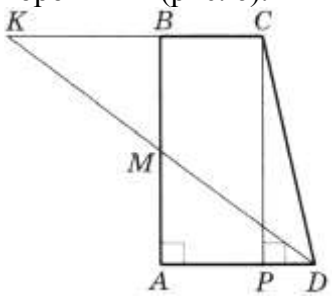

Рис. 6

Продолжим биссектрису *DM* угла *ADC* до пересечения с продолжением основания *BC* в точке *K*. Поскольку $\angle CKD = \angle ADK = \angle CDK$.

треугольник *KCD* равнобедренный, *KC* = *CD* = 41,

тогда *KB* = *KC* – *BC* = 41 – 16 = 25.

Из равенства треугольников *AMD* и *BMK* следует, что

$$AD = BK = 25.$$

Проведем через вершину *C* прямую, параллельную стороне *AB*, до пересечения с основанием *AD* в точке *P*, тогда

$$PD = AD - AP = 25 - 16 = 9.$$

Треугольник *CPD* прямоугольный, так как

$$CD^2 = 41^2 = 40^2 + 9^2 = DC^2 + PD^2$$

Поэтому *CP* – высота трапеции. Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)CP = 820.$$

Ответ: 820.

ОКРУЖНОСТИ

Пример 7. В треугольнике *ABC* известны длины сторон: *AB* = 84, *AC* = 98, точка *O* – центр окружности, описанной около треугольника *ABC*. Прямая *BD*, перпендикулярная прямой *AO*, пересекает сторону *AC* в точке *D*. Найдите длину отрезка *CD*.

Решение. Пусть продолжение отрезка *BD* за точку *D* пересекает окружность, описанную около треугольника *ABC*, в точке *P* (рис. 7).

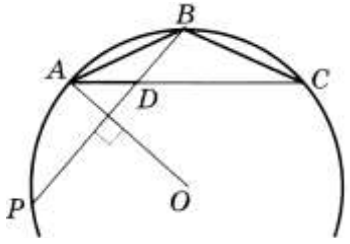

Рис. 7

Тогда хорда *BP* перпендикулярна радиусу *OA* этой окружности. Значит, точка *A* – середина дуги *BP*, не содержащей вершину *C*. Отсюда следует, что

$$\angle ABD = \angle ABP = \angle ACB$$

как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги. Поэтому треугольники *ABD* и *ACB* подобны по двум углам (угол *A* – общий). Следовательно

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC},$$

откуда

$$AD = \frac{AB^2}{AC} = 72.$$

$$CD = AC - AD = 98 - 72 = 26.$$

Ответ: 26.

Пример 8. В треугольнике *ABC* биссектриса угла *A* делит высоту, проведенную из вершины *B*, в отношении 5 : 3, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, если *BC* = 8.

Решение. Пусть *BH* – высота треугольника, которую биссектриса пересекает в точке *O* (рис. 8).

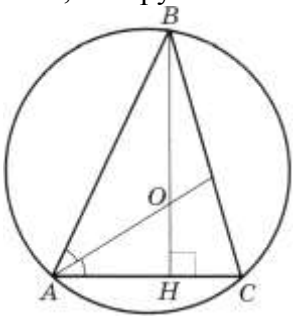

Рис. 8

По теореме о биссектрисе в треугольнике *ABH* имеем:

$$\frac{BA}{AH} = \frac{BO}{OH} = \frac{5}{3}.$$

Следовательно, $cosA = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{5}$.

Тогда $sinA = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$.

По теореме синусов для треугольника *ABC* искомый радиус равен

$$\frac{BC}{2sinA} = \frac{8 \cdot 5}{2 \cdot 4} = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 9. На стороне *BC* остроугольного треугольника *ABC* как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту *AD* в точке *M*, *AD* = 49, *MD* = 42, H – точка пересечения высот треугольника *ABC*. Найдите длину отрезка *AH*.

Решение. Пусть окружность с диаметром *BC* вторично пересекается с прямой *AC* в точке *K* (рис. 10).

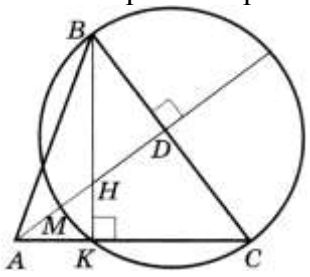

Рис. 9

Поскольку *BK* – высота остроугольного треугольника *ABC*, то точка *K* лежит на стороне *AC*, а точка *H* лежит на отрезке *BK*.

Продолжим высоту *AD* за точку *D* до пересечения с окружностью в точке *Q*. Тогда

$$DQ = MD = 42.$$

По следствию из теоремы о касательной и секущей

$$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = 7 \cdot 91 = 637.$$

Из подобия прямоугольных треугольников *AKH* и *ADC* следует, что

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC},$$

откуда

$$AK \cdot AC = AD \cdot AH = 49AH.$$

Значит,

$$49AH = 637,\ AH = 13.$$

Ответ: 13.

Пример 10. В параллелограмме *ABCD* проведена диагональ *AC*. Точка *O* является центром окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Расстояния от точки *O* до точки *A* и прямых *AD* и *AC* соответственно равны 5, 4 и 3. Найдите площадь параллелограмма *ABCD*.

Решение. Пусть окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается сторон *AB*, *BC* и *AC* в точках *M, L* и *K* соответственно (рис. 11), *H* – проекция точки *O* на прямую *AD* (точка *H* может лежать либо на стороне *AD*, либо на ее продолжении).

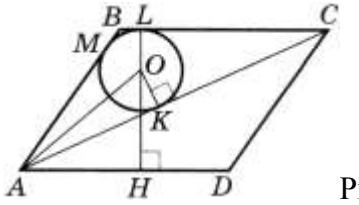

Рис. 10

Тогда *OL* = *OK* = 3,

Точки *O, L* и *H* лежат на одной прямой, HL – высота параллелограмма *ABCD*.

$$HL = OL + OH = 3 + 4 = 7.$$

Из прямоугольного треугольника *AOK* находим, что $AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = 4$.

Пусть *p* и *S* – полупериметр и площадь треугольника *ABC*, *r* = 3 – радиус окружности, вписанной в него. Обозначим *BC* – *x*. Тогда

$$p = AK + CL + BM = AK + CL + BL = AK + BC = 4 + x,$$

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot HL = \frac{1}{2}x \cdot 7 = 3{,}5x,$$

$$S = p \cdot r = 3(4 + x).$$

Из уравнения 3,5*x* = 3(4 + *x*)

находим, что *BC* = *x* = 24.

Следовательно, $S_{ABCD} = 2S = 2pr = 168$.

Ответ: 168.

Пример 11. В трапеции *ABCD* боковая сторона AB перпендикулярна основанию *BC*. Окружность проходит через точки *C* и *D* и касается прямой *AB* в точке *E*. Найдите расстояние от точки *E* до прямой *CD*, если *AD* = 14, *BC* = 12.

Решение. Пусть *T* – точка пересечения прямых *AB* и *CD*, *P* – проекция точки *E* на прямую *CD*, Q – проекция точки *C* на прямую *AD* (рис. 11)

Обозначим *CD* = *x*. Поскольку QD = *AD* – AQ = *AD* – BC = 2, из подобия прямоугольных треугольников *TBC* и *CQD* находим, что *TC* = 6*x*.

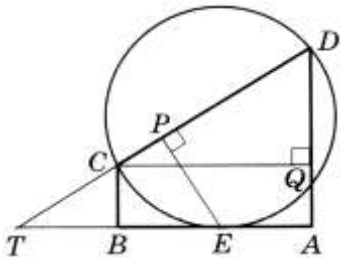

Рис.11

По теореме о касательной и секущей $TE^2 = TD \cdot TC = 42x^2$

Из подобия прямоугольных треугольников *TPE* и *TBC* имеем:

$$EP = \frac{BC \cdot TE}{TC} = \frac{12 \cdot x\sqrt{42}}{6x} = 2\sqrt{42}.$$

Ответ: $2\sqrt{42}$.

Пример 12. В трапеции *ABCD* основания *AD* и *BC* равны соответственно 49 и 21, а сумма углов при основании *AD* равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точки *A* и *B* и касающейся прямой *CD*, если *AB* = 20.

Решение. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке *P* (рис. 12).

Рис. 12

Из условия следует, что ∠*APD* = 90°. Из подобия треугольников *APD* и *BPC* получаем, что

$$\frac{BP}{AP}=\frac{BC}{AD},\frac{BP}{BP+20}=\frac{21}{49},BP=15.$$

Пусть окружность касается прямой *CD* в точке *K*, а *O* – ее центр. Опустим перпендикуляр *OM* на хорду *AB*. Точка *M* – середина *AB*. Так как *OMPK* – прямоугольник, находим радиус:

$$OK=MP=BP+\frac{1}{2}AB=15+10=25.$$

Ответ: 25.

Пример 13. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до ее меньшего основания.

Решение. Пусть *BC* – меньшее основание, *AB* – боковая сторона, *AD* – большее основание трапеции *ABCD*, *M* – точка касания окружности со стороной *AB*, *N* – со стороной *BC*, Q – точка пересечения диагоналей, *O* – центр окружности, *r* – ее радиус (рис. 13).

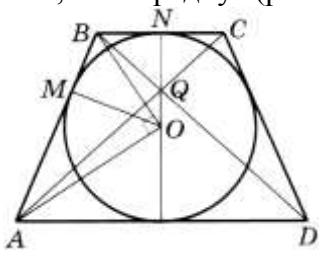

Рис.13

Поскольку трапеция описана около окружности, то сумма ее боковых сторон равна сумме оснований, то есть 60, поэтому

$$S_{ABCD}=2r\cdot\frac{AD+BC}{2}=60r.$$

Значит, *r* = 9.

Прямые *AD* и *BC* параллельны. Значит,

$$\angle ABC+\angle BAD=180^{o}$$

Поскольку лучи *AO* и *BO* – биссектрисы углов *BAD* и *ABC* соответственно, получаем:

$$\angle ABO+\angle BAO=90^{o}$$

Значит, треугольник *AOB* прямоугольный, а *OM* – его высота, опущенная на гипотенузу, поэтому:

$$AM\cdot MB=OM^2=r^2,AM(AB-AM)=r^2,AM(30-AM)=81.$$

Учитывая, что *AM* > *BM*, из последнего уравнения находим, что *AM* = 27. Тогда

$$AD=54,BC=6.$$

Треугольник *AQD* подобен треугольнику *CQB* с коэффициентом подобия 9, значит, высота *QN* треугольника *BQC* составляет $\frac{1}{10}$ высоты трапеции, то есть равна диаметру вписанной в нее окружности. Следовательно,

$$QN=\frac{1}{10}\cdot 18=1{,}8.$$

Ответ: 1,8.

Пример 14. Середина M стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 10$, а углы B и C четырехугольника равны соответственно 112^o и 113^o.

Решение. Условие задачи означает, что четырехугольник $ABCD$ вписал в окружность с центром M, а AD – ее диаметр (рис. 14).

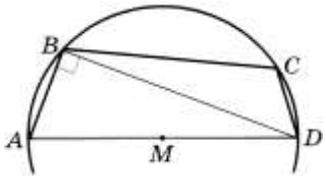

Рис.14

Так как сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180°, получаем, что $\angle DAB = 67^o$ и $\angle ADC = 68°$. Угол ABD прямой, так как опирается на диаметр, поэтому

$$\angle ADB = 90° - 67° = 23^o,$$

откуда

$$\angle CDB = 68^o - 23° = 45°.$$

По теореме синусов для треугольника CDB:

$$AD - \frac{BC}{sin45^o} = 10\sqrt{2}$$

Ответ: $10\sqrt{2}$.

Пример 15. Четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 25$ и $CD = 16$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причем $\angle AKB = 60^o$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырехугольника.

Решение. Через точку B проведем хорду BM, параллельную диагонали AC (рис. 15).

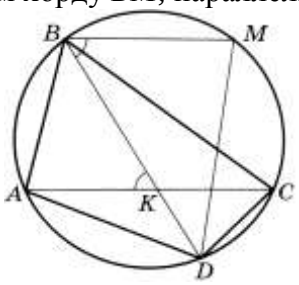

Рис.15

Тогда

$$CM = AB = 25,\ \angle DBM = \angle AKB = 60^o.$$

Четырехугольник $BMCD$ вписанный:

$$\angle DCM = 180^o - \angle DBM = 180° - 60^o = 120^o.$$

По теореме косинусов

$$DM = \sqrt{CM^2 + CD^2 - 2CM \cdot CDcos\angle DCM} = \sqrt{1281}.$$

По теореме синусов радиус окружности равен

$$\frac{DM}{2sin\angle DBM} = \frac{\sqrt{1281}}{\sqrt{3}} = \sqrt{427}.$$

Ответ: $\sqrt{427}$.

Пример 16. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCP, равен 8 см, тангенс угла BAC равен $\frac{4}{3}$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Решение. Обозначим радиусы вписанных окружностей треугольников ABC, BCP и ACP через r, r_1, и r_2, соответственно (рис. 16).

Треугольники ABC, CBP и ACP подобны по двум углам. Поэтому отношение сходственных элементов любых двух из этих треугольников равно соответствующему коэффициенту подобия, то есть отношению сходственных сторон.

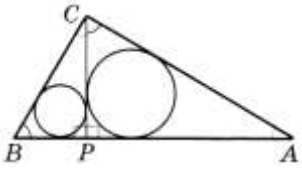

Рис. 16

Значит,

$$\frac{r_1}{r}=\frac{BC}{AB},\frac{r_2}{r}=\frac{AC}{AB},\frac{r_1}{r_2}=\frac{BC}{AC}=tg\angle BAC=\frac{4}{3}.$$

Возведя в квадрат и почленно сложив два первых равенства, получим:

$$\frac{r_1^2+r_2^2}{r^2}=\frac{BC^2+AC^2}{AB^2}=1,r^2=r_1^2+r_2^2.$$

Но

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{4}{3},r_2=\frac{3}{4}r_1=6.$$

Тогда

$$r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10\text{ см}.$$

Ответ: 10 см.

Пример 17. Окружности радиусов 25 и 100 касаются внешним образом. Точки *A* и *B* лежат на первой окружности, точки *C* и *D* – на второй. При этом *AC* и *BD* – общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми *AB* и *CD*.

Решение. Пусть *O* и O_1 – центры первой и второй окружностей соответственно (рис. 17).

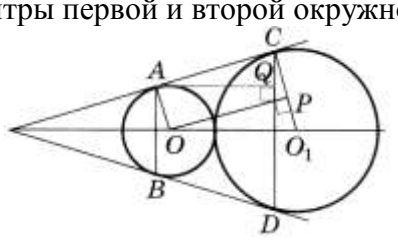

Рис. 17

Линия центров касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, то есть 125.

Опустим перпендикуляр *OP* из центра меньшей окружности на радиус O_1C второй окружности. Тогда

$$O_1P=O_1C-PC=O_1C-OA=100-25=75.$$

Из прямоугольного треугольника OPO_1 находим, что $OP^2=10\ 000$, а так как четырехугольник *AOPC* – прямоугольник, то *AC* = *OP*.

Опустим перпендикуляр *AQ* из точки *A* на прямую *CD*, тогда

$$\angle O_1OP=90^o-\angle OO_1P=\angle O_1CD=90^o-\angle ACQ=\angle CAQ$$

Прямоугольные треугольники *AQC* и OPO_1, подобны по острому углу, поэтому

$$\frac{AQ}{AC}=\frac{OP}{OO_1}.$$

Следовательно,

$$AQ=\frac{OP\cdot AC}{OO_1}=\frac{OP^2}{OO_1}=80.$$

Ответ: 80.